Ellipsoïde de John-Loewner.

Leçon : 170, 171, (203), (204), (206), 219, 152, 158

Réf : Oraux X-ENS, Algèbre 3

$\hookrightarrow E_q = \{x : x^T S x \leq 1\}$

Lemme 1 Soient $M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $N \in S_n(\mathbb{R})$. Alors il existe $C \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$C^T M C = I_n \quad \text{et} \quad C^T N C = D$$

où D est une matrice diagonale réelle.

Preuve

$M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc l'application $\Phi : (X,Y) \mapsto X^T M Y$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$, il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^T M P = I_n$.

(il existe une bon pour Φ).

Or $P^T N P \in S_n(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème spectral il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $Q^T P^T N P Q = D$.

Ainsi $C = PQ$ convient. □

Lemme 2 Soient $A, B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, et $\alpha, \beta \geq 0$ telles que $\alpha + \beta = 1$. Alors

$$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta.$$

Preuve

Par le lemme 1, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tq $A = P^T P$ et il existe $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tq $P^T B P = D$. $\forall i\ \lambda_i > 0$ car $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Ainsi : $(\det A)^\alpha (\det B)^\beta = (\det P^2)^\alpha (\det P^2 \det D)^\beta = (\det P)^2 (\det D)^\beta$

et $\det(\alpha A + \beta B) = \det(\alpha P^T P + \beta P^T D P) = \det[P^T(\alpha I_n + \beta D) P]$
$= \det(P)^2 \det(\alpha I_n + \beta D)$.

Il suffit donc de mq $\prod_{i=1}^n (\alpha + \beta \lambda_i) \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^\beta \iff \sum_{i=1}^n \ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \beta \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$

$\ln$ est concave, donc $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\ln(\alpha + \beta\lambda_i) \geq \alpha \ln(1) + \beta \ln(\lambda_i)$
$= \beta \ln(\lambda_i)$

(car $\alpha + \beta = 1$).

On obtient le résultat en sommant. □

Théorème 3 Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact d'intérieur non vide. Alors il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K.

Preuve

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle.

ellipsoïde centré en O de $\mathbb{R}^n$: a une équation du type $q(x) \leq 1$, où $q \in \mathcal{Q}_{++}$. ($\mathcal{Q}$: forme quad.
$\mathcal{Q}_+$: " " positive
$\mathcal{Q}_{++}$: " " déf ")

Si $q \in \mathcal{Q}_{++}$, on note $\mathcal{E}_q := \{x \in \mathbb{R}^n : q(x) \leq 1\}$.

Calculons le volume de $\mathcal{E}_q$, noté V_q, pour $q \in \mathcal{Q}_{++}$. Il existe une bon $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle q s'écrit $q(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$, $a_i > 0$.

Ainsi :

$$V_q = \int\!\!\int \cdots \int_{a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2 \leq 1} dx_1 \cdots dx_n \qquad x_i = \frac{t_i}{\sqrt{a_i}}$$

$$V_q = \int \cdots \int_{t_1^2 + \dots + t_n^2 \leq 1} \frac{1}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}} \, dt_1 \cdots dt_n$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{a_1 \cdots a_n}}$$, où V_0 est le volume de la boule unité.

$$= \frac{V_0}{\sqrt{D(q)}}$$, si on note $D(q)$ le déterminant dans une bon de q.

On va donc montrer qu'il existe une unique $q \in \mathcal{Q}_{++}$ tq $D(q)$ soit maximal et tq $\forall x \in K \; q(x) \leq 1$.

On munit $\mathcal{Q}$ de la norme $N(q) = \sup_{\|x\| \leq 1} |q(x)|$.

On introduit l'ensemble
$$\mathcal{A} = \{q \in \mathcal{Q}_+, \forall x \in K, q(x) \leq 1\}.$$

On va maximiser D sur ce domaine. Mq $\mathcal{A}$ est un compact, convexe, non vide de $\mathcal{Q}$.

• $\mathcal{A}$ convexe.
Soit $q, q' \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in [0,1]$. Alors $\lambda q + (1-\lambda) q' \in \mathcal{Q}_+$, et si $x \in K$:
$$(\lambda q + (1-\lambda) q')(x) = \lambda q(x) + (1-\lambda) q'(x) \leq \lambda + 1 - \lambda = 1,$$ donc

$\lambda q + (1-\lambda) q' \in \mathcal{A}$.

- $\mathcal{A}$ est compact. En dimension finie : compact $\Leftrightarrow$ fermé $\oplus$ borné.

  i) $\mathcal{A}$ fermé.

  Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ tq $q_n \xrightarrow{N} q \in Q$. Mq $q \in \mathcal{A}$.

  $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ |q(x) - q_n(x)| \leq N(q_n - q)\|x\| \underset{n\to+\infty}{\to} 0.$

  Donc :

  $\to \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad q(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) \geq 0, \ q \in Q_+$

  $\to \forall x \in K, \quad q(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n(x) \leq 1, \ q \in \mathcal{A}.$

  ii) $\mathcal{A}$ borné. Soit $a \in K$ et $r > 0$ tq $B(a,r) \subset K$ ($\mathring{K} \neq \emptyset$).

  Soit $q \in \mathcal{A}$. Si $\|x\| \leq r$, alors $a + x \in K$ donc $q(a+x) \leq 1$.
  De plus $q(-a) = \underset{\leq 1}{q(a)}$, donc

  $$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(x+a-a)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{inégalité de Minkowski, } q \in Q_+}}{\leq} \sqrt{q(x+a)} + \sqrt{q(-a)} \leq 1 + 1 = 2.$$

  donc $q(x) \leq 4$, et si $\|x\| \leq 1$, alors $q(rx) \leq 4$ ($r\|x\| \leq 1$)

  donc $|q(x)| = q(x) \leq \frac{4}{r^2} \Rightarrow \boxed{N(q) \leq 4/r^2}$.

  Donc $\mathcal{A}$ est compact.

- $\mathcal{A}$ non vide : K est borné (car compact). Soit donc $M > 0$ tq $\forall x \in K$ $\|x\| \leq M$. La forme quad. $\tilde{q} : x \mapsto \frac{\|x\|^2}{M^2} \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}$ non vide.

Ainsi l'application $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, $q \mapsto D(q)$ est continue ($\sqrt{\ }$ et det sont $\mathcal{C}^0$)
sur le compact $\mathcal{A}$: elle atteint donc son maximum sur $\mathcal{A}$ en q_0.
De +, $\tilde{q} \in \mathcal{A}$, donc $D(q_0) \geq D(\tilde{q}) > 0$, donc $q_0 \in Q_{++}$, cqfd !

Il reste à prouver l'unicité.

Soit $q \in \mathcal{A}$ tel que $D(q) = D(q_0)$. Par l'absurde, on suppose que $q \neq q_0$.

$\mathcal{A}$ est convexe, donc $\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q_0 \in \mathcal{A}$, et donc par le lemme 2,

$$D\left(\tfrac{1}{2}(q+q_0)\right) = \det\left(\tfrac{1}{2}S + \tfrac{1}{2}S_0\right) \underset{\neq}{\geq} \sqrt{\det S}\,\sqrt{\det S_0} = \det S_0 = D(q_0).$$

où S, resp. S_0, matrice de q dans une base, resp. q_0. / faire la convexité ici.

On aboutit à une contradiction. □

Corollaire 4 Les sous-groupes compacts de $GL(E)$ maximaux sont exactement les groupes orthogonaux $O(q)$, où $q \in \mathcal{Q}_{++}$.

Preuve

1) Soit G sg de $GL(E)$ compact. Il existe un p.s sur E, associé à une forme quad q, tq $G \subset O(q)$.

On munit E d'une norme euclidienne qcq $\|\cdot\|$ et $B = \overline{B(0,1)}_{,\|\cdot\|}$.

$K = \{g(x),\ g \in G, x \in B\} = \bigcup_{g \in G} g(B) \to$ compact (image de $G \times B$).

$\mathring{K} \neq \emptyset$, $B \subset K$. Soit $\mathcal{E}_q$ donné par ~~ }} le thm, $\mathcal{E}_q \supset K$.

$\forall g \in G$, la form. quad $q'(x) = q(g(x))$ est bien définie positive, et $K \subset \mathcal{E}_{q'}$ car $g(K) = K$

mais G est compact, donc $|\det g| = 1$, car det bornée sur G donc sur $\{g^p, p \in \mathbb{Z}\}$. Donc $D(q') = D(q) \Rightarrow q' = q$ par unicité.

$\Rightarrow g \in O(q)\ \forall g \in G$, donc $G \subset O(q)$.

2) si G est maximal compact, $\boxed{G = O(q).}$

Si $G = O(q)$, G est compact. Si G' sg compact de $GL(E)$, alors $G \subset G'$ et $G' \subset O(q')$ par ce qui précède

donc $O(q) \subset O(q') \Rightarrow O(q) = O(q') \Rightarrow G = G'$.

↑ cf ex 3.36. □